REVISTA EMA
2003, VOL. 8, Nº 2, 183-207

EL TABLERO MEDIEVAL DE CÁLCULO Y LAS OPERACIONES CON NÚMEROS ROMANOS: ESTUDIO HISTÓRICO Y PEDAGÓGICO

JOSÉ MARÍA NÚÑEZ

Se describe el fundamento del tablero medieval de cálculo y su uso para la realización de operaciones aritméticas. Se muestra la sencilla operatividad de este instrumento y cómo el sistema se adecua perfectamente a la escritura de los números romanos. La descripción se complementa con diversas ramificaciones tanto históricas como pedagógicas. Así, se analizan sus antecedentes, y puesto que el tablero de calcular es la evolución del ábaco romano, el trabajo comienza con un breve estudio del ábaco romano basado exclusivamente en los datos arqueológicos y documentales conservados. También, y a partir del análisis de la utilización del tablero, ofrecemos una visión más completa de los factores que explican la resistencia ofrecida por la sociedad europea a la introducción del sistema de numeración indoarábigo y su metodología algorítmica. Finalmente, se plantea brevemente un estudio comparativo entre la metodología del tablero y la algorítmica mostrándose las semejanzas estructurales que subyacen. Todo ello permite, además de realizar algunas consideraciones históricas, proponer una modificación del tablero para uso didáctico.

The basis of the medieval counting board and its use in performing arithmetical operations are described. We highlight the instrument's simplicity and demonstrate that the system was ideally suited to the writing of Roman numbers. The article also has a number of historical and pedagogical considerations. Since the counting board is a development of the Roman abacus, the article begins with a brief study of the latter, based solely on the archaeological and documentary evidence preserved. Via an analysis of the uses of the board, we offer a broader view of the reasons for Europe's resistance to the introduction of the Indo-Arabic numerical system and its algorithmic methodology. Finally, we briefly compare and contrast the methodology of the board and algorithmic methodology, showing their underlying structural similarities. This allows us to make a number of historical remarks and to propose a modification of the counting board for use in teaching.

Palabras claves: estudio histórico, aritmética, enseñanza, básica primaria.

INTRODUCCIÓN

El propósito del trabajo que se reporta en este artículo nace de una serie de cuestiones que se plantean con frecuencia en el aula cuando el profesor explica a sus alumnos las ventajas que supuso para la civilización occidental, la introducción del sistema de numeración posicional indoarábigo frente a los antiguos sistemas de agrupamiento. Aun cuando los pueblos de la antigüedad emplearon diversos sistemas de numeración de agrupamiento simple o múltiple, el ejemplo que suele utilizarse como modelo para realizar las comparaciones es el del sistema de numeración romano. Como es bien sabido este sistema de numeración es objeto de enseñanza, pues aparece en los currículos escolares actuales. Cuando los alumnos lo conocen suficientemente se les suele comentar lo difícil que era realizar operaciones con él y que ese fue el motivo de su desaparición como sistema de numeración operativo. Se insiste en que el conjunto de algoritmos estudiados en la enseñanza primaria no son viables para operar con números romanos, pues son procedimientos que fueron diseñados para trabajar exclusivamente con sistemas posicionales. Muchos alumnos suelen entonces preguntar cómo podían los "romanos" hacer los cálculos si no conocían ni podían tampoco utilizar con su sistema, los algoritmos. A esta cuestión, el profesor acostumbra contestar generalmente dando una respuesta evasiva y poco concreta: "utilizando una especie de ábaco".

Encontramos en los textos escolares una sucinta narración de cómo el sistema de numeración actual fue introducido en Europa. Se explica que este sistema, utilizado hoy en día en la mayor parte del planeta, fue desarrollado en la India, pronto asimilado por los árabes, que lo extendieron por amplias zonas y fue conocido en Europa hacia el siglo X. También se comenta que su difusión fue lenta, pues no fue de uso corriente en el comercio y en otras actividades en el Viejo Continente hasta bien entrado el siglo XVIII. Pero, tampoco se da a los alumnos una explicación satisfactoria de por qué fueron necesarios tantos siglos para que un sistema sustituyera al otro si las ventajas de su uso en el cálculo eran tan evidentes. Además, si para los cálculos utilizaban ábacos, dado el largo periodo de su utilización, deben existir restos materiales o escritos de este instrumento en la cultura europea, que expliquen su funcionamiento.

En este artículo intentaremos dar respuesta a estas preguntas. Para ello seguiremos, hasta donde nos sea posible, las fuentes originales, aunque las adaptaremos para hacerlas más asequibles al lector moderno. Junto y en paralelo a los razonamientos históricos tendremos presente, en todo momento, la aplicabilidad didáctica de las cuestiones que tratemos. Finalmente, también, y como ocurre en toda investigación, al proponer respuestas a las cuestiones planteadas surgirán interrogantes que implican nuevas cuestiones y éstas nuevos estudios.

LOS ÁBACOS ROMANOS

Ciertamente los romanos realizaban sus cálculos con instrumentos que denominaban *abacus*. Pero, el término *abacus*, entre los antiguos romanos, tenía varias acepciones pertenecientes a muy diferentes ámbitos, como son la matemática, la arquitectura, el mobiliario doméstico, el ocio, etc., aunque, en esencia, todas aluden a objetos formados por superficies planas con forma rectangular[1].

Había dos acepciones de *abacus* de índole matemática. La primera hacía referencia a un tablero plano rodeado de un pequeño reborde y recubierto de una fina capa de arena sobre la que los matemáticos podían realizar dibujos de figuras. Los razonamientos geométricos que pudieran extraerse dependían, lógicamente, de la precisión de los trazos. Por esta razón, el poeta latino Persio, en uno de sus escritos, compara la habilidad del poeta cuando mide la métrica de sus versos con la del geómetra al trazar sus líneas sobre la arena del ábaco[2]. Para algunos autores esta acepción explica el origen del término, pues la hacen derivar, a través del griego αβαξ, de la palabra semítica *abaq*, que significa “arena”, “polvo” (Daremberg, 1919). Parece verosímil, pues los primeros ábacos vinieron de Grecia y los griegos pudieron importarlos de Oriente, donde eran ya utilizados, a través de los intercambios comerciales.

Pero, a nosotros, nos interesa la segunda acepción matemática del término *abacus*: como instrumento de cálculo. De estos ábacos tenemos información directa por haberse conservado algunos, muy pocos, ejemplares en diversos museos europeos. Quizás el más conocido, porque también es el mejor conservado, es el custodiado en el Museo Kircher de Roma (Fellmann, 1983). Se trata de una tabla de bronce de medidas 8 centímetros por 12 centímetros con una serie de ranuras paralelas en las que aparecen insertadas unas pequeñas piezas, encajadas de modo que no pueden caer, pero que gozan de suficiente movilidad como para permitir su desplazamiento a lo largo de dichas ranuras. Estas pequeñas piezas móviles podían ser de metal, madera, marfil u otro material resistente, se les daba una forma redondeada, pero con un cuello que permitiera su engarce en la ranura.

1. Véase la entrada correspondiente a “abacus” en Daremberg (1919, pp. 1-4). También es útil la consulta del mismo término en Pauly’s et al. (1996, p. 3).
2. La referencia en el texto latino es *Satira* I, párrafo 131.

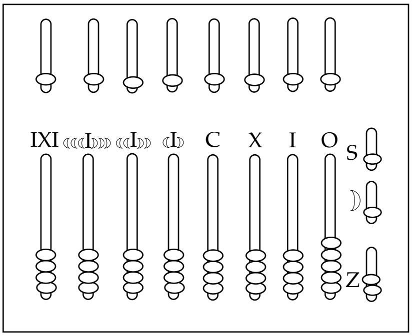


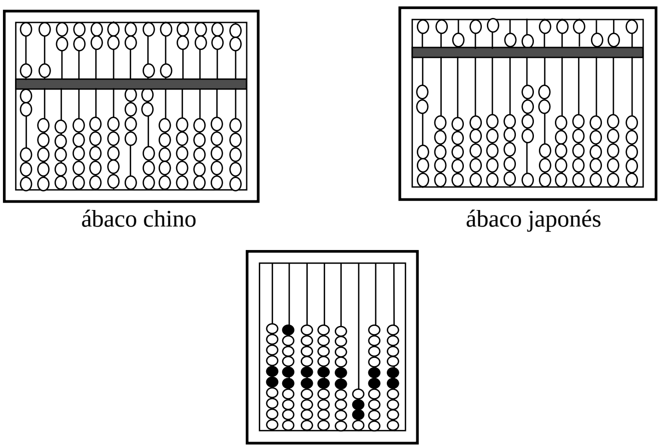
Figura Nº 1.

Si nos fijamos en las ranuras que aparecen en el modelo que describimos (ver Figura Nº 1) observaremos que hay ocho más largas que se prolongan con otras ocho de menor longitud situadas en la parte superior. Además aparecen otros tres pequeños cortes en el extremo derecho de la tabla. Sabemos la orientación de la tabla por los numerales grabados en una de sus caras en la zona media entre las ranuras largas y las cortas. Todas las ranuras largas contienen cuatro piezas, excepto la primera de la derecha, que tiene cinco. Las ranuras cortas tienen todas ellas sólo una pieza móvil, al igual que dos de las tres del extremo derecho.

Los signos numerales grabados en el bronce expresan el valor representado por las piezas de cada columna. Así, las cuatro fichas colocadas en la segunda ranura larga comenzando por la derecha representan unidades (I), las situadas en la tercera ranura decenas (X), las de la cuarta centenas (C), las de la quinta millares (I), las de la sexta decenas de millar ((I)), las de la séptima centenas de millar (((I))) y las de la octava unidades de millón (IXI). Las fichas en las ranuras cortas de la parte superior representan los agrupamientos de cinco, es decir: 5 unidades, 5 decenas, etc. Para comprender el significado de las ranuras y fichas restantes debemos explicar que estos ábacos se utilizaban preferentemente para los cálculos de carácter monetario. La unidad dineraria romana era el as. El as se dividía en 12 onzas y a esta unidad se refiere la primera ranura larga (O) y su continuación superior: las cinco fichas inferiores representan cada una de ellas una onza, mientras que la ficha de la ranura superior simboliza seis onzas. Finalmente las tres pequeñas ranuras de la derecha de la tabla corresponden a las unidades monetarias de menor valor del sistema romano y vienen representadas por fracciones de onza: media onza (S), un cuarto de onza (Ↄ) y un tercio de onza (Z). Como es lógico, sólo la ranura de los tercios de onza requiere de dos fichas móviles.

Para su utilización, el ábaco debía situarse en posición horizontal con todas las fichas colocadas en el extremo inferior de cada ranura. Para representar una cantidad bastaba con desplazar hacia la parte superior la o las fichas correspondientes a las unidades, decenas, centenas, etc. de la misma.

Observemos que, salvo la adaptación a su sistema monetario, la estructura del ábaco romano coincide con la de los ábacos que conocemos de otras culturas. La diferencia fundamental con los ábacos modernos está en que éstos se diseñan y construyen con formatos y materiales menos pesados: mayoritariamente son bastidores rectangulares de madera que llevan insertadas, en paralelo, una serie de varillas metálicas, o también de madera, por las que se deslizan anillas, usualmente de madera o plástico. En unos casos (ábaco chino y japonés) una barra horizontal separa las fichas que representan las unidades de las que corresponden a los agrupamientos de cinco; en otros (ábaco ruso) no existe esta separación, pero la distinción se lleva a cabo coloreando de manera diferente las anillas (ver Figura Nº 2).



ábaco chino

ábaco japonés

ábaco ruso

Figura Nº 2.

En todos estos ábacos la metodología seguida para representar números en base decimal es siempre la misma: a) conjuntos de piezas idénticas simbolizan las unidades de cada agrupamiento de los que consta la cantidad numérica a representar; b) la diferenciación de los agrupamientos se lleva a cabo disponiendo los distintos conjuntos de piezas ordenadamente de un modo horizontal o vertical; c) con el empleo de piezas que tienen el valor de cinco unidades se consigue una abreviación en la escritura y este diferente valor debe distinguirse con claridad de los que representan unidades para evitar confusiones.

No sólo tenemos pruebas materiales de la existencia de los ábacos romanos, sino también gráficas. La figura representada en un sarcófago del Museo del Capitolio en Roma (ver Figura Nº 3) corresponde a un esclavo experto en números (*calculator*) que, arrodillado frente a su amo, realiza cálculos con la ayuda de un ábaco (Daremberg, 1919).

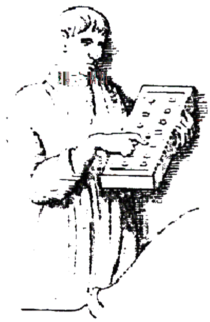


Figura Nº 3.

Además de estas pruebas tenemos testimonios documentales del empleo de los ábacos. Un ejemplo muy expresivo es una carta que Plinio el Joven escribe a su amigo llamado Romano[3]. En ella relata un entretenido juicio que había presenciado recientemente sobre la reclamación de una herencia. El tribunal, después de escuchar a los testigos y tras una larga y tormentosa deliberación, determina las cantidades que correspondían a los herederos recurriendo al auxilio de un ábaco.

Pero, si lo que buscamos en las referencias clásicas es una explicación técnica del proceso operativo, descubrimos que en ningún texto de carácter matemático griego o romano se hace referencia al ábaco y a su utilización. El único referente escrito lo encontramos en un autor muy tardío: Boecio (470-525). Y la referencia es además bastante breve. Se trata de un párrafo que está situado, no en su tratado *De Arithmetica*, sino en el *De Geometria*, y, más concretamente, al concluir su libro primero (Boeci, 1499). La razón de esta colocación aparentemente anómala debe buscarse en el hecho de que el libro segundo está dedicado a la geometría práctica y en él los cálculos numéricos le resultan imprescindibles. Por otra parte, la aritmética de Boecio se dedica exclusivamente al estudio de las propiedades de los números y sus relaciones, y lo hace de un modo totalmente especulativo, siguiendo el

3. La referencia en el texto latino es *Epistolae*, libro 6, carta 33, párrafo 9.

modelo de la aritmética de Nicómaco, de la que se considera una especie de traducción-paráfrasis[4]. En su breve referencia al ábaco, Boecio, se limita a describirlo indicando el modo como pueden representarse cantidades numéricas, pero sin aludir a los procedimientos de cálculo.

La falta de información nos impide precisar cómo empleaban los romanos el ábaco para la realización de cálculos, pero su similitud con los ábacos modernos, y más concretamente con el japonés, con el que coincide en número de piezas y en disposición, nos induce a conjeturar que algunas de las técnicas empleadas fueron también semejantes. No vamos a explicar aquí el manejo del ábaco japonés, pues es un tema bien desarrollado en el excelente manual clásico de Kojima (1954), nos limitamos a plantear la conjetura con toda la precaución a la que nos obliga la falta de fuentes primarias.

Es necesario hacer algunas observaciones importantes sobre el uso de los ábacos. La representación de cantidades numéricas en estos instrumentos resulta muy fácil de comprender y también muy ilustrativa sobre aspectos conceptuales tales como la formación y composición del número, por lo cual se recomienda su utilización didáctica en la escuela. En cambio, la realización de operaciones no es una tarea tan fácil de entender y menos de realizar. La razón es obvia: cada vez que representamos un número en el ábaco borramos el anteriormente escrito. Esto significa que, a la hora de hacer cálculos, en los que forzosamente intervienen varios números, se requiere cierta habilidad, tanto de memoria visual, como de cálculo mental. El manejo de los ábacos implica, en consecuencia, un proceso de aprendizaje.

Sería falso creer que los romanos únicamente conocían y utilizaban el ábaco tal y como lo hemos descrito —descripción acorde con los hallazgos arqueológicos. Parece que estos ábacos eran de uso exclusivo de ricos comerciantes, de artesanos de la construcción o de altos funcionarios de la administración que precisaban disponer de un instrumento resistente para realizar sus cálculos y que contaban con medios económicos para poder costeárselo. No todo ciudadano podía permitirse tener instrumentos tan lujosos para llevar a cabo sus operaciones aritméticas. Resulta difícil aceptar, por ejemplo, que los escolares romanos, aun cuando eran hijos de familias patricias, hubieran acudido a las *ludi* provistos de costosos y pesados *abaci* de bronce para poder seguir las lecciones del *ludimagister* y del *calculator*[5]. Parece pues plausible pensar que debían existir otros modelos de ábacos de diseño y construcción más sencilla y también más económica, para uso escolar o cotidiano.

En favor de la suposición de que existían otros formatos más sencillos de ábacos están algunas referencias indirectas en varios textos de carácter

4. "*De Arithmetica* de Boecius es como una versión de la *Aritmética* de Nicómaco" (Wieleitner, trad. 1928, p. 46).
5. Sobre el sistema educativo en la antigüedad véase la obra capital de Jaeger (1960).

literario o histórico. En una de sus famosas biografías comparadas, Plutarco, describe una comparecencia en el foro en la que se reclama a Catón una importante deuda al tesoro público. La cantidad adeudada la llevaba escrita un antiguo amigo del acusado en un ábaco. Relata Plutarco que, Catón, indignado, le pide la tabla y, dando un manotazo que hace caer las piedras, borra con desdén la cantidad escrita en ella[6].

Datos como este nos inducen a creer que los ábacos corrientes eran tablas rectangulares de madera en las que se trazaban o se marcaban una serie de líneas paralelas (ver Figura Nº 4). Sobre estas líneas se disponían pequeñas piedras que indicaban las unidades de los distintos agrupamientos de diez que conformaban el número a representar. Los números se escribían en estos ábacos verticalmente. Precisamente el hecho de que en latín la palabra *calculus* significa piedra, explica que el “mover piedras” en un ábaco sea “calcular”, verbo que todavía utilizamos hoy para denotar la realización de operaciones con números, aun cuando éstas ya no se realizan con piedras ni con ábacos.

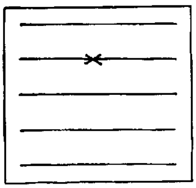


Figura Nº 4.

Por tratarse de materia orgánica no se han conservado restos materiales de estas tablas, sólo disponemos, además de las escuetas referencias escritas, de alguna representación gráfica, lamentablemente bastante dudosa en la mayoría de los casos. Entre ellas, citemos un pequeño medallón con una piedra grabada perteneciente a la colección del Gabinet des Médailles de París (ver Figura Nº 5) en el que se muestra un hombre sentado que calcula con un ábaco sobre una mesa de la que resaltan los *calculi* (Daremberg, 1919).

Finalmente, para ser justos en las atribuciones, debemos decir que estos ábacos corrientes, muy probablemente, no fueron invención de los romanos y, al igual que otras muchas cosas, los tomaron de los griegos. También las referencias griegas a los ábacos escasean, pero hay un resto arqueológico que, por su interés, merece ser citado. Se trata de una losa rectangular de mármol hallada a fines del siglo XIX en la isla de Salamina (ver Figura Nº 6). Tiene unas dimensiones de, aproximadamente, un metro de largo por 75 centímetros de ancho y muestra grabadas una serie de líneas paralelas, trazadas

6. La referencia en el texto latino es *Cato minor*, párrafo 70.

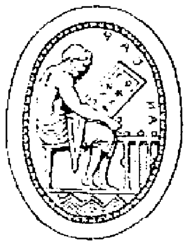


Figura Nº 5.

a igual distancia unas de otras (Daremberg, 1919). Aunque se discutió su aplicación, pensándose inicialmente que se trataba de una tabla de juego (otra de las acepciones de la palabra *abacus*), los numerales griegos grabados inducen a creer que se trata de un ábaco. Su semejanza con los ábacos corrientes construidos en madera, que acabamos de describir, resulta notoria.

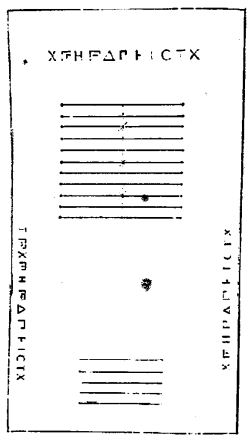


Figura Nº 6.

EL TABLERO MEDIEVAL DE CÁLCULO

Durante la Edad Media europea el sistema educativo se restringe y constriñe al ámbito de las escuelas monacales. En ellas se sigue el modelo de enseñanzas propuesto por Boecio: un núcleo básico constituido por el conjunto de materias denominado *trivium* (gramática, dialéctica y retórica), que venía acompañado, en un segundo plano y como complemento del anterior, por el *quadrivium* (aritmética, geometría, música y astronomía). Por lo que se refiere al aprendizaje de las dos ramas de la matemática, éste se basaba, casi exclusivamente, en la lectura y comentario de los textos de Boecio sobre aritmética y geometría. El uso del ábaco era, por consiguiente, conocido y utilizado en los cálculos.

La escasez de metales hizo que, probablemente, los ábacos manejados en el medioevo fueran muy semejantes al modelo corriente descrito para la época romana: una simple tabla de madera con una serie de incisiones paralelas sobre las que se colocaban pequeñas piedras u otros objetos para representar las cantidades numéricas. Pero, de un modo gradual, se introduce una sencilla pero importante innovación en este ábaco. No sabemos exactamente cuándo ocurrió, ni mucho menos quién fue el autor o autores, sólo podemos conjeturar que esta evolución del ábaco romano (o griego) ocurrió en el ámbito monacal de la Alta Edad Media.

La modificación va a tener como consecuencia principal suavizar una de las dificultades más notables que tiene el uso de los ábacos tradicionales: el hecho de que la anotación de un número obliga al "borrado" del anterior. La idea es simple, consiste en añadir nuevas líneas paralelas trazadas ortogonalmente a las anteriores, con el fin de permitir la escritura de varios números manteniendo una separación entre ellos. De este modo, la incorporación de nuevas cantidades no obliga a la eliminación de las anteriores.

Esta innovación se realiza sobre el ábaco romano corriente de escritura vertical. Lógicamente no podía llevarse a cabo en un ábaco estructurado y con piezas móviles encajadas, era necesario disponer de una superficie en la que pudieran añadirse nuevas líneas sin dificultad y, además, de una serie de piezas que fueran fácilmente renovables y en cantidad ilimitada. Desgraciadamente, y por los mismos motivos de fragilidad de los materiales constructivos, que hemos comentado de épocas anteriores, no se han conservado ábacos medievales, aunque sí disponemos de algunas referencias al nuevo modelo. La más conocida, y que incluimos aquí por su fuerza expresiva, es un grabado de época renacentista que representa una alegoría de los dos *typus arithmeticae* que coexistían en ese momento (ver Figura Nº 7)[7]. En él aparecen dos calculistas operando con métodos diferentes; uno utiliza los algoritmos con los guarismos indoarábigos y el otro, un ábaco empleando números romanos, que aunque no se explicitan se daban por sobrentendidos para un lector contemporáneo.

Veamos, a continuación, un ejemplo de representación de un número romano en un tablero de cálculo medieval. Por razones prácticas modificaremos algo el aspecto del modelo original y colocaremos las fichas dentro de las casillas en lugar de sobre las líneas de separación. Esta alteración no afecta a lo sustancial, ni al proceso general.

7. Ilustración tomada de Hogben (1966, p. 27).

Figura Nº 7.

Construimos un tablero de cuatro filas y dos columnas, aunque no hay impedimento alguno, salvo las propias dimensiones físicas de la base, para construir tableros con mayor o menor número de filas o columnas; esta cuestión depende única y exclusivamente de la cantidad de números que deseemos representar y de su magnitud.

Comenzaremos por señalar que la escritura del número será vertical y de abajo a arriba. Cada columna dará cabida a un único número. En la primera fila se indican las unidades, en la segunda las decenas, en la tercera las centenas y en la cuarta los millares (ver Tabla Nº 1). Si deseamos representar cantidades superiores al millar añadiremos tantas filas como sea necesario; así, si deseamos trabajar con millones deberemos disponer una tabla con, al menos, siete filas. Un hecho importante que se debe tener muy en cuenta es que en cada fila hay dos niveles. El más bajo, está reservado a las unidades y en él pueden aparecer, ninguna, una, dos, tres o cuatro piezas. En el superior, se coloca, si existe, el agrupamiento de cinco unidades. Esta característica, heredada sin duda del ábaco tradicional, es muy útil para representar números en el sistema de numeración romano. En efecto, observemos que cada letra del numeral romano se corresponde con una piedra o ficha situada en el tablero y, viceversa, cada ficha del tablero se traduce por una letra numeral. Así, el número MDCCXVIII se representa en el ábaco con nueve fichas y el MMCLXXXV con ocho.

M	•	• •
D	•	
C	• •	•
L		•
X	•	• • •
V	•	•
I	• • •	
	MDCCXVIII	MMCLXXXV

Tabla Nº 1.

Podemos, ahora, leer los números representados en la ilustración alegórica que hemos reproducido en la Figura Nº 7. El número que aparece a la derecha del abacista es el LXXXII y el situado a su izquierda es el MCCXXXXI. Seguramente al lector le sorprenderá este último numeral, pues estará acostumbrado a escribir 1241 en la forma MCCXLI, es decir, aplicando el principio de sustracción del sistema de numeración romano que se enseña habitualmente en la escuela. Pero este principio, que nosotros aplicamos a rajatabla siempre que escribimos numerales romanos, no tenía un uso tan extendido en el mundo antiguo. Se utilizaba, como las abreviaturas en la escritura, en aquellas ocasiones en las que era necesario, por razones materiales (como en las inscripciones en lápidas, monumentos, etc.), acortar al máximo el texto. En la vida corriente y especialmente en los cálculos se prefería la versión extendida de los numerales, porque facilitaba su transcripción en ábacos y las consiguientes operaciones.

Una vez que nos hemos familiarizado con la escritura de números romanos en el tablero de cálculo podemos ya adentrarnos en la realización de operaciones. A diferencia de lo que ocurría con el ábaco romano, del tablero de cálculo tenemos información sobre su uso. En el Renacimiento abundan las aritméticas que, con mayor o menor detalle, comentan la metodología a seguir en la realización de operaciones. De todas ellas la que, a nuestro juicio, ofrece una guía más detallada es la de Robert Recorde (*circa* 1510-1558) (Recorde, 1557). Nosotros nos inspiramos en ella, aunque introducimos modificaciones para hacer los pasos más fáciles e inteligibles al estudiante actual.

Comencemos con la adición. Si deseamos realizar la siguiente suma: MCCVIII + DLXII, procederemos, en primer lugar, por preparar un tablero de, por ejemplo, cuatro filas y seis columnas (ver Tabla Nº 2). A continuación, y en las dos primeras columnas, escribiremos los dos sumandos. En la tercera columna colocaremos juntas las fichas de ambos valores manteniendo escrupulosamente su posición relativa dentro de cada fila. No puede considerarse todavía el resultado final, pues debemos comprobar que en los niveles de las unidades no hay más de cuatro fichas, ni en el de los grupos de cinco más de una. Haremos las correcciones correspondientes, comenzando por las filas inferiores y siguiendo un orden ascendente, pues de este modo evitamos tener que modificar los valores ya revisados. Observamos que en la primera fila y en el nivel de las unidades hay cinco fichas, luego debemos suprimirlas añadiendo una al grupo de cinco; como éste ya tiene una debemos suprimir ambas incorporando una ficha más en el nivel de las unidades de la segunda fila (decenas). Como no hay otra corrección para hacer, el conjunto de fichas resultante, que se indica en la cuarta columna, nos proporciona la suma de los dos números propuestos.

•		•	•		
• •	• 	• • •	• • •		
	• •	• •	• • •		
• • • •	• •	• • • • • •			

MCCVIII + DLXII = MDCCLXX

Tabla Nº 2.

Señalemos que un abacista experimentado no precisaría de tantas columnas para realizar la suma que hemos planteado, sólo le bastaría una. En efecto, procedería de la siguiente manera: escribiría el primer sumando en esa columna y colocaría las fichas del segundo junto a las del primero, respetando filas y niveles. Es decir, plantearía directamente la situación que nosotros hemos situado en la tercera columna. Finalmente, en la misma columna, haría las correcciones pertinentes, suprimiendo y añadiendo fichas, hasta obtener el resultado final. Pero en una situación de aprendizaje, como la que nosotros estamos proponiendo aquí, es más ilustrativo distinguir ambos sumandos de los pasos intermedios y de la misma suma. Todo ello redunda en un mejor conocimiento del método seguido y también en la posibilidad de repasar el proceso.

Veamos un ejemplo de sustracción: MCCXVIII - CXII.

●		●	●		
● ●	●	● o	●		
●	●	o			
● ● ● ●	● ●	● ● o o	● ●		

MCCXVIII - CXII = MCVI

Tabla Nº 3.

Procederemos del siguiente modo. En el tablero 4 x 6 anotamos en la primera columna el minuendo y en la segunda el sustraendo. A continuación, volvemos a construir el minuendo en la tercera columna y nos aseguramos de que en cada nivel haya igual número, o más, de fichas que en el correspondiente del sustraendo. Si ese es el caso, como ocurre en el ejemplo que hemos propuesto, quitamos en cada fila y nivel igual cantidad de fichas que las existentes en la misma fila y nivel del sustraendo (en la Tabla Nº 3 hemos indicado las fichas que se eliminan con círculos blancos). El número que se obtiene (representado en la cuarta fila) es la resta o diferencia que buscamos.

Planteemos ahora otra sustracción: MCCVIII - DCXXXII (ver Tabla Nº 4). Seguiremos idéntico proceso hasta llegar a la columna tercera, en la que nos percatamos de que en la fila de las decenas y en la de las centenas hay menos fichas en el minuendo que en el sustraendo. Para subsanar la situación en la fila de las decenas, quitamos una ficha de las unidades de centena (C) y añadimos una ficha de cincuenta (L) y cinco de diez (XXXXX) en la segunda fila. Del mismo modo, para resolver el problema de la tercera fila, suprimimos la ficha de unidad de millar (M) cambiándola por dos fichas de quinientos (DD). Estamos ahora en condiciones de suprimir las fichas que son comunes con el sustraendo y el conjunto que nos queda (que representamos en la cuarta columna) es la resta o diferencia DLXXVI.

●					
● ●	● ●	● o o	●		
	● ● ●	● ● ● o o o	● ● ●		
● ● ● ●	● ●	● ● o o	● ●		

MCCVIII - DCXXXII = DLXXVI

Tabla Nº 4.

En las multiplicaciones y divisiones es donde se evidencia verdaderamente la utilidad del tablero de cálculo.

Consideremos la multiplicación siguiente: CLXIII * XXI (ver Tabla Nº 5).

		* X	* X	* I	
		•	•		• • •
•		• •	• •	•	• • • •
• •	• •	• • •	• • •	• •	• •
• • •	•			• • •	• • •
CLXIII * XXI =					MMMCCCCXXIII

Tabla Nº 5.

Una notable propiedad del tablero es que todo número representado en él puede multiplicarse por X, C, M, etc., con sólo desplazar, simultáneamente, todas sus fichas, una, dos, tres casillas hacia arriba. Por otra parte, la multiplicación puede contemplarse como una suma repetida del multiplicando tantas veces como indica el multiplicador. Como se cumple que XXI = X + X + I, el producto CLXIII * XXI equivale, por la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición, a CLXIII * (X + X + I) = CLXIII * X + CLXIII * X + CLXIII * I. Bastará pues, con desplazar el multiplicando una casilla hacia arriba dos veces (columnas tres y cuatro) y sumar con el número en cuestión (columna quinta), el resultado final se recoge en la columna sexta.

Observemos que, en la multiplicación anterior, hemos necesitado de tantas columnas auxiliares como número de letras tiene el multiplicador. Este hecho, junto a la magnitud de los números con los que se opera, condiciona evidentemente las dimensiones del tablero. Comprobémoslo en otro ejemplo: DCXXI * CXXXII (ver Tabla Nº 6). En este caso el multiplicador tiene seis letras, luego dispondremos de un tablero de 9 columnas y de, al menos, 5 filas. Por lo demás, el proceso seguido es idéntico y muy fácil de entender.

Abordemos finalmente las divisiones. Al igual que la multiplicación es una generalización de la adición, la división lo es de la sustracción. De este modo podemos concebir como objetivo de toda división el averiguar cuántas veces podemos restar el divisor del dividendo, esa cantidad es el cociente buscado. En lugar de restar el divisor de vez en vez, podemos, al utilizar el tablero de cálculo, avanzar rápidamente restando, de golpe, X, C, M veces el divisor desplazándolo una, dos, tres casillas hacia arriba.

		* C	* X	* X	* X	* I	* I	
		• •						• • • •
		• •	• •	• •	• •			•
• •	•	•	• •	• •	• •	• •	• •	• • • • •
• •	• • •		•	•	•	• •	• •	• • •
•	• •					•	•	• •

DCXXI * CXXXII = <u>LXXXI</u> DCCCCLXXII

Tabla Nº 6.

Consideremos el siguiente ejemplo: CCLXXXVIII : XXI (ver Tabla Nº 7). Comenzaremos por construir un tablero con suficientes columnas para poder ilustrar todos los pasos del proceso con detalle. Como hemos hecho en las restantes operaciones, en las dos primeras columnas colocamos los dos números que deseamos dividir. En la columna tercera volvemos a escribir el dividendo y le restamos el mayor múltiplo (de diez, cien, mil...) posible del divisor. En el ejemplo es sólo de diez (X) veces, por lo tanto comenzamos restándole CCX al dividendo, e indicamos las fichas que suprimimos con círculos blancos. Las fichas restantes las volvemos a colocar en la columna siguiente (cuarta) y restamos las fichas del divisor (pues ya no cabe un nuevo grupo de diez). El resultado lo escribimos en una nueva columna y volvemos a restar el divisor. Este proceso lo seguimos (columnas quinta y sexta) hasta que ya no es posible seguir restando por obtenerse un número menor que el divisor. Este número (XV) es el resto de la división y los pies de las columnas intermedias nos indican la cantidad de veces que hemos restado el divisor del dividendo y se corresponden, por consiguiente, con las letras numerales del cociente (XIII).

• •		o o				
• • • •	• •	• • • o	• o o	• • • o o	• o o	•
• • • •	•	• • • •	• • • o	• • o	• o	•
CCLXXXVIII : XXI =		X	I	I	I	(XV)

Tabla Nº 7.

Mostremos otro ejemplo en el que el cociente está formado por tres agrupamientos diferentes (C, X, I). Se trata de la división exacta: MMCCCLIIII : XI (ver Tabla Nº 8).

● ●		● o	o					
● ● ●		● ● o	● o	o				
●	●	●	●	● ● ● ● o	● ● ● o	● ● o	● o	o
● ● ● ●	●	● ● ● ●	● ● ● ●	● ● ● ●	● ● ● o	● ● o	● o	o
MMCCCLIIII : XI =		C	C	X	I	I	I	I

Tabla Nº 8.

Aunque es obvio, debemos insistir en que las operaciones que hemos descrito a través de ejemplos las mostramos extendidas para facilitar su comprensión y, también, para ilustrar el paralelismo entre símbolo numeral y paso realizado, pero en la práctica, un abacista experimentado hubiera requerido, sin duda, un número menor de columnas del tablero para llevar a cabo esos mismos cálculos. Así, en la última división, cuando llegamos al valor XXXXIIII, es trivial observar que XI puede restarse IIII veces sin necesidad de ocupar cuatro columnas para constatar este hecho.

De todo lo expuesto se infiere que el tablero medieval de cálculo permite realizar las cuatro operaciones básicas utilizando el sistema de numeración romano con igual exactitud que los algoritmos lo hacen en el sistema indoarábigo.

ALGUNAS CONSIDERACIONES DE CARÁCTER DIDÁCTICO

Si comparamos la metodología empleada con el tablero y con los algoritmos tradicionales apreciamos varias diferencias importantes. En primer lugar, el uso del tablero es un procedimiento más lento y laborioso que los algoritmos. También, a diferencia de lo que ocurre con los algoritmos en los que se sigue un proceso perfectamente delimitado por lo que a número de pasos se refiere —dependiendo éstos únicamente de la mayor o menor cantidad de cifras de los números implicados— en el caso del tablero, el número de etapas depende, además del factor magnitud, del grado de habilidad del abacista, que puede reducir en gran medida el número de ellos.

Cuando se analizan las etapas seguidas en la realización de las operaciones con el tablero de cálculo se observa inmediatamente que los procesos implicados son muy simples: consisten básicamente en añadir o quitar fichas del mismo nivel y saber que estas acciones pueden realizarse de número en número o bien, para acelerar el proceso, en grupos de diez, cien, mil, etc., desplazando las fichas de un número una, dos o más casillas hacia arriba. Además son acciones fáciles de comprender pues se relacionan directamente con acepciones básicas de las operaciones: añadir es sumar, quitar es restar, sumar el mismo número varias veces es multiplicar y restar repetidamente es dividir. Por otra parte, mientras que en el tablero el conjunto de filas y columnas que determina el sistema de casillas facilita y guía la colocación de las fichas numerales, dificultando de ese modo el cometer errores, en los algoritmos, si éstos se realizan sobre una hoja de papel en blanco, la inexistencia de referencias obliga, si se quieren evitar equivocaciones en el cálculo, a una gran precisión y cuidado en la escritura de las cifras para colocar a cada una de ellas en la columna adecuada.

Si comparamos ahora la sencillez e inteligibilidad de los pasos del tablero con los procesos seguidos en los algoritmos tradicionales, más breves sin duda, pero más complejos y difíciles de entender por los niños de enseñanza primaria, estaremos en condiciones de empezar a comprender por qué el tablero compitió con éxito durante siglos en Europa con los algoritmos.

Pero, incluso hay más elementos que explican el largo uso histórico del tablero. Como es bien sabido, la brevedad de los algoritmos de la multiplicación y de la división se consigue con la memorización de las tablas de multiplicar de los números de una sola cifra. Este hecho, unido a la misma dificultad conceptual de los algoritmos, implica que su aprendizaje requiera varios años de escolaridad, como bien saben los maestros de educación básica. Resulta comprensible que, en épocas como la Edad Media o la Edad Moderna europeas en las que la enseñanza estaba limitada a una pequeña capa social, esta metodología de cálculo, que precisaba tan largo aprendizaje, estuviera limitada a un reducido círculo de personas cultas. Solamente, tras los avances logrados después de la Revolución Francesa, cuando la educación primaria se hizo obligatoria y gratuita para todos los ciudadanos, se pudo extender a toda la sociedad el uso de los algoritmos en el cálculo.

La pervivencia del tablero de cálculo hasta el siglo XVIII en Europa tuvo pues, como condicionantes esenciales, no sólo su simplicidad, que lo hacía accesible tras un relativamente breve aprendizaje a todo tipo de persona —incluso a aquellas con un nivel de estudios bajo o inexistente— sino la falta de instrucción generalizada que hubiera posibilitado una enseñanza de los algoritmos.

Cuando en historia se habla de lo que condiciona, siempre hay que hablar en plural. Además, al analizar el uso y pervivencia del tablero de cálculo, del que disponemos de tan pocos testimonios y documentos, forzosamente nos movemos en el terreno de las conjeturas. Acabamos de mencionar condicionantes técnicos sobre el funcionamiento del tablero y también educativos, pero igualmente debemos hacer referencia, por su indudable impacto, a un aspecto material. En efecto, cuando hoy en día, una vez realizado un cálculo en una hoja de papel no tenemos inconveniente alguno en botarla, pues sabemos que conseguir otra hoja no nos va a suponer demasiada molestia ni costo, nos puede sorprender que en otro tiempo esto no fue así. En la Edad Media no se disponía de papel —era preciso escribir en papiro (muy raro) o en pergamino (piel de animal sometida a un tratamiento laborioso)— y en la Edad Moderna —aunque en Europa se había introducido la fabricación del papel— éste era un bien muy costoso. En estas condiciones, no puede extrañar la ventaja que suponía el tablero en la realización de operaciones, pues era fácil de construir y además permitía su reutilización indefinidamente, mientras que el empleo de los algoritmos implicaban un dispendio muy alto si el material sobre el que se escribía era desechado.

Finalmente, y aunque sólo sea para mostrar la complejidad de factores que intervienen, señalemos otros dos condicionantes que se pueden argüir para explicar la resistencia a la desaparición del sistema de numeración romano. Son de menor envergadura, pero también conviene tenerlos en cuenta a la hora de exponer esta cuestión. Uno de ellos, es el rechazo social al uso de unos símbolos que a la población le resultaban extraños. Estos símbolos, al no pertenecer al alfabeto latino veían su grafía modificada según el copista que los escribía. Hasta la llegada de la imprenta no se consiguió fijar su perfil (Ifrah, 1981). Este rechazo a lo "extraño" también se puede constatar, en una época más tardía (siglo XIX), en la dificultad de introducción del sistema métrico decimal que abolió, al menos oficialmente, los antiguos sistemas de medidas (Montanuy, Núñez y Servat, 1989). El segundo, de una índole muy diferente, fue el miedo que los mercaderes y comerciantes, en general, tenían de que los pagarés u otros documentos en los que aparecían cantidades numéricas fueran falsificados. En efecto, intercalar un "1" en una cantidad provocaba que las cifras colocadas a su izquierda quedaran automáticamente multiplicadas por diez, mientras que si lo intercalado era una letra numeral romana la cantidad sólo se veía alterada por el valor de ese numeral.

Pero, la mejor constatación de esa resistencia está en que todavía seguimos utilizando los numerales romanos. Sin duda su simplicidad, el hecho de que sean letras de nuestro alfabeto, que nos sean útiles cuando interesa diferenciar dos tipos de ordenaciones y el que nos permitan leer fechas y datos de documentos del pasado, entre otros motivos, contribuyen a su pervivencia.

También quedan restos del empleo del tablero, aunque en un nivel más latente, en nuestro vocabulario. Por ejemplo, cuando al sumar o multiplicar decimos "llevamos dos", tiene esta expresión un sentido material de guardar como en el tablero. También es una frase corriente del lenguaje cotidiano decir a alguien que "vamos a pasar cuentas".

Llegados a este punto nos planteamos si el tablero de calcular, además de mostrar cómo es posible operar con números romanos, puede tener todavía hoy alguna otra utilidad didáctica. Desde los comienzos de la pedagogía activa se ha propuesto iniciar a los niños en el sistema de numeración decimal y en la práctica de las operaciones mediante la manipulación de objetos concretos. Con esta finalidad se han concebido diferentes tipos de materiales estructurados: bloques multibase de Dienes, regletas de Cuisenaire y, también, ábacos escolares.

Para su utilización como ábaco didáctico se ha diseñado, en plástico o madera, un material que consiste, básicamente, en un soporte que lleva insertadas una serie de barras paralelas en las que pueden ensartarse anillas. El conjunto recuerda los ábacos modernos, sólo que al estar abierto por un extremo permite quitar o añadir anillas (ver Figura Nº 8). Este hecho facilita el reconocimiento por parte del alumno del número escrito, pues a su vista se presentan únicamente las anillas que lo describen, además, al poder colocar la cantidad de anillas que se desee, este material también permite trabajar en bases diferentes a la decimal. No hay anillas que representen grupos de cinco, por lo que las anillas simbolizan siempre unidades y su valor dependerá exclusivamente de la barra en la que se ensarten.

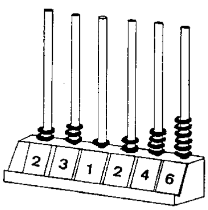


Figura Nº 8.

Dejando aparte su mayor o menor costo, este ábaco escolar tiene el mismo inconveniente didáctico que los ábacos modernos: sólo permite contemplar los números de uno en uno; cuando se construye una cantidad se "borra" la escrita anteriormente. Pero, como ya hemos comentado más arriba, el tablero de cálculo no tiene este inconveniente. Es muy fácil y económico construir uno de estos útiles con una simple cartulina en la que se dibujan un conjunto de líneas paralelas y perpendiculares hasta perfilar una tabla con el número de filas y columnas que se desee. Como fichas pueden utilizarse legumbres secas, semillas de todo tipo, monedas del menor valor del sistema monetario, botones, cuadraditos de cartulina o cualquier otro objeto menudo del que se disponga en cantidad. Dado que se trata de utilizar este tablero para introducir el sistema decimal ordinario simplificaremos el modelo medieval, diseñado para el uso de numerales romanos, eliminando las fichas de valor cinco. De este modo, en cada casilla colocaremos hasta nueve fichas según sea el valor del dígito que corresponda y éstas indicarán, de abajo a arriba, las unidades, decenas, centenas, etc. del número escrito en la columna (ver Tabla Nº 9).

Centena de millar		•				
Decena de millar		• • •				
Unidad de millar	• • •	•				
Centena		• • • • • • • • •				
Decena	• • • • •	• • • •				
Unidad	• •					
	3052	131940				

Tabla Nº 9.

Con este tablero y con esta disposición de fichas podemos realizar las cuatro operaciones básicas con números en el sistema indoarábigo. Dado que la esencia de los procedimientos es la misma, seguiremos idénticos pasos que los descritos con los números romanos, e incluso con más facilidad, pues ahora no tenemos que distinguir dos niveles en cada fila, dado que los agrupamientos de cinco resultan innecesarios. La ventaja didáctica de esta metodología es que la mecánica del cálculo resulta mucho más visual y manipulativa que la que conlleva el uso de los algoritmos tradicionales. Además, al conservar los números escritos, los pasos y etapas intermedias pueden extenderse, graduando su presentación para adaptarla al nivel de comprensión y de preparación de los alumnos.

Aunque esto exceda, probablemente, el marco de la enseñanza habitual del cálculo, es bueno que el profesor sepa que la separación entre la metodología algorítmica y la derivada del uso del tablero de cálculo no es tan tajante como a primera vista pudiera parecer. Para comprobarlo basta con llevar a cabo unas ligeras transformaciones. Realicémoslas sobre un ejemplo que ya hemos considerado (ver Tabla Nº 10), la multiplicación CLXIII * XXI = MMMCCCCXXIII.

		•	•		• • •
•		• •	• •	•	• • • •
• •	• •	• • •	• • •	• •	• •
• • •	•			• • •	• • •

Tabla Nº 10.

En primer lugar cambiaremos de sistema de numeración: $163 \times 21 = 3423$ (ver Tabla Nº 11).

		•	•		• • •
•		• • • • • •	• • • • • •	•	• • • •
• • • • • •	• •	• • •	• • •	• • • • • •	• •
• • •	•			• • •	• • •

Tabla Nº 11.

Convertiremos ahora el tablero en uno simétrico respecto a la fila inferior, de modo que ésta, la de las unidades, encabece la tabla (ver Tabla Nº 12).

• • •	•			• • •	• • •
• • • • • •	• •	• • •	• • •	• • • • • •	• •
•		• • • • • •	• • • • • •	•	• • • •
		•	•		• • •

Tabla Nº 12.

Un giro de 90º en el sentido de las agujas del reloj provocará que las filas se conviertan en columnas y las columnas en filas. De este modo los números representados aparecerán en posición horizontal en lugar de vertical (ver Tabla Nº 13).

	•	••• •••	•••
		••	•
•	••• •••	•••	
•	••• •••	•••	
	•	••• •••	•••
•••	••••	••	•••

Tabla Nº 13.

Finalmente, si sustituimos las fichas de cada casilla por una cifra del sistema indoarábigo de valor equivalente, tendremos una configuración que nos es familiar, pues representa una forma extendida del algoritmo de la multiplicación (ver Tabla Nº 14).

	1	6	3
		2	1
1	6	3	
1	6	3	
	1	6	3
3	4	2	3

Tabla Nº 14.

Para obtener la forma habitual del algoritmo bastará con comprimir o compendiar en uno solo los grupos de números derivados de la misma cifra del multiplicador, lo cual se consigue sin dificultad si, previamente, se ha memorizado la tabla de multiplicar por una cifra. Ya hemos comentado que esta simplificación en el número de pasos también la podía llevar a cabo el abacista experimentado, por lo que, probablemente, los pasos que realizaba en la práctica coincidirían esencialmente, cambiando por supuesto el formato, con el proceso algorítmico que conocemos. No parecen pues, existir diferencias tan profundas como las que, a priori, se suelen señalar entre ambos procesos de realizar operaciones.

Precisamente estas similitudes nos inducen a pensar, si el conocimiento, siquiera fuera parcial de los algoritmos árabes, por parte de algunos monjes medievales, no impulsó o ayudó en el proceso de la transformación del ábaco romano en tablero de calcular. Sabemos que algunos de ellos eran conocedores de la cultura árabe. Por ejemplo, Gerbert d'Aurillac (más conocido por su sobrenombre de Silvestre II, que adoptó cuando fue elegido Papa en el año 999), durante su estancia en la Península Ibérica estudió en la Córdoba del Califa ilustrado Abdarrahman III y sus escritos muestran claramente esta influencia (Gerberti, 1899). Por otra parte, tampoco hay que despreciar los esfuerzos realizados en las escuelas monacales, no para ampliar los conocimientos heredados de la antigüedad, pero sí para hacerlos más asequibles (dentro de una perspectiva ortodoxa del cristianismo) a los escolares. Y en este sentido, hay que reconocer que el tablero medieval de cálculo facilita en gran medida y hace comprensibles las operaciones con números romanos. Nos faltan pruebas concluyentes y, a falta de investigaciones más meticulosas en los archivos medievales, estas suposiciones no pasan de ser meras conjeturas.

La semejanza entre la técnica algorítmica y la del uso del tablero de calcular radica en un hecho esencial común: ambas se basan en una estructura y composición posicional del número. Cuando, en muchas ocasiones, en ámbitos escolares, se habla de la dicotomía que existe, a la hora de representar los números, entre los sistemas posicionales y los diversos sistemas de agrupamiento, convendría matizar este aserto. Es totalmente cierto, que desde el punto de vista conceptual, esta separación existe, pero también lo es que, desde la perspectiva social, ambos tipos de sistemas pueden coexistir en una misma comunidad sin problemas. El mejor ejemplo lo tenemos en nosotros mismos. Representamos los números y realizamos los cálculos empleando exclusivamente un sistema posicional, pero, en cambio, en el momento de nombrarlos o escribir su nombre con letras del alfabeto utilizamos sistemas de agrupamiento. Así, al nombrar el número 2345, no somos consecuentes con el sistema, pues no decimos “dos-tres-cuatro-cinco” (como hacemos si el número está en una base distinta de la decimal), sino “dos mil trescientos cuarenta y cinco”.

Los términos que utilizamos para nombrar los números derivan de los correspondientes términos latinos, pues los romanos, como bien sabemos, no sólo al nombrar los números, sino también al representarlos, utilizaban un sistema de agrupamiento. Pero es importante señalar, que también ellos, al calcular utilizando el ábaco, empleaban un sistema de representación numérica posicional. Es totalmente erróneo creer que tanto griegos como romanos utilizaban los ábacos de manera mecánica ignorando su fundamento posicional. Nada nos parece mejor como constatación de ese conocimiento y para concluir este pequeño trabajo, que reproducir una cita de Diógenes Laercio. Este autor, en su célebre historia de los filósofos griegos, pone en boca del sabio ateniense Solón y refiriéndose a la arbitrariedad de los poderosos, el siguiente comentario: “...del mismo modo que con las fichas numerales, que usamos en los cómputos del ábaco, pues así como cada una de ellas ya vale más, ya menos, igualmente los tiranos exaltan a unos y abaten a otros" (Laercio, trad. 1914, p. 49)[8].

REFERENCIAS

Boeci (1499). *Opera* (vol. II). (De Arithmetica. De Musica. De Geometria. Euclides: Elementa geometriae, liber I-IV). Venetiis: Johannes et Gregorius de Gregoriis.

Daremberg, C. (1919). *Dictionaire des Antiquités Grecques et Romaines d'apres les textes et les monuments* (vol. I). París: Lib. Hachette.

Fellmann, R. (1983). Römische Rechentafeln aus Bronze. *Antike Welt, 14*, 36-40.

Gerberti (1899). *Opera mathematica (972-1003).* Berolini: Nicolaus Buber.

Hogben, L. (1966). *El universo de los números. Historia y evolución de las matemáticas*. Barcelona: Destino.

Ifrah, J. (1981). *Histoire universelle des chiffres.* París: Sheghers.

Jaeger, W. (1960). *Paideia* (3 tomos). México: Fondo de Cultura Económica.

Kojima, T. (1954). *The Japanese Abacus. Its Use and Theory.* Tokyo: Charles E. Tuttle.

Laercio, D. (trad. 1914). *Vida, opiniones y sentencias de los filósofos más ilustres.* Vol. I. Madrid: Librería de Perlado, Páez y Cia.

Montanuy, M., Núñez, J.M. y Servat, J. (1989). La influencia de la Revolución Francesa en la enseñanza elemental de la aritmética. *Suma. Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 4*, 21-26.

Pauly's et al. (1996). *Der Neue Pauly. Enzyklopädie der Antike* (vol. I) (A-Ari). Stuttgart: J.B. Netzler.

Plinio Cecilio Segundo (1891). Panegírico de Trajano y cartas. Vol. I. Madrid: Lib. Viuda de Hernando.

Recorde, R. (1557). *The Whetstone of Witte.* London: John Kingston.

Wieleitner, H. (1928). *Historia de las matemáticas.* Barcelona: Labor.

José M. Núñez Espallargas
Universidad de Barcelona
Departamento de Didáctica de las
Ciencias Experimentales y de la Matemática
Barcelona, España
E-mail: emjne17d@d5.ub.es

8. La referencia al texto griego es *Vita*, Libro I, párrafo 59.